EXERCICE N°1 : 30' 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (**Unité graphique 4 cm**).

On désigne par θ un nombre réel tel que, $-\pi<\theta<\pi$.

On appelle *A*, *M* et *N* les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre *O* et de rayon 1, et par $\mathscr{C}'$ le cercle de centre *A* et de rayon 1.

1°) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, et placer *A*, *M* et *N* dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2°) Montrer que *N* appartient à $\mathscr{C}'$ et donner la nature du quadrilatère *OANM*.

Déterminer un argument de $1+e^{i\theta}$.

3°) On pose $u=1+e^{i\theta}$.

a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2-2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$.

En déduire la seconde solution de cette équation.

b) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2-3z+3=0$?

4°) On considère l'équation $(E):z^2-az+a=0$ où *a* est un nombre réel tel que $0<a\leq 4$.

On nomme *R* le point d'affixe *a*, et *T* le milieu de [*OR*].

La perpendiculaire à l'axe réel passant par *T* coupe $\mathscr{C}'$ en deux points *U* et *U'*.

Montrer que les affixes de *U* et de *U'* sont les solutions de (E) .

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan *P* dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2°) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ et soit Δ la droite passant par *I* et perpendiculaire à P.

a) Montrer que la droite Δ coupe le plan P en *J*.

b) Calculer la distance *IJ*.

3°) Soit *S* l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a) Montrer que *S* est une sphère de centre *I* et de rayon *R* que l'on déterminera.

b) Montrer que le plan *P* coupe la sphère *S* suivant le cercle de centre *J* et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4°) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) Vérifier que *N* est un point de la sphère *S*.

b) Justifier que le point *N* n'appartient pas au plan P.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d) En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre *ABCN* est minimal.